مسئول پروژه: حمیدرضا محمودیان

عدد طبیعی $p>1$ را اول می‌گوییم، اگر تنها مقسوم‌علیه‌های مثبت آن ۱ و p باشند. وضعیت اعداد اول در اعداد طبیعی به مانند اتم‌ها در برابر ملکول‌ها است. یعنی همان‌طور که ملکول‌ها از اتم‌ها تشکیل شده‌اند، اعداد طبیعی از اعداد اول ساخته شده‌اند. به این معنا که اگر n عدد طبیعی باشد، اعداد اول $p_1, p_2, \dots, p_k$ موجودند که $n = p_1 p_2 \dots . p_k$ (توجه کنید که p_i ها لزوماً متمایز نیستند). به این تساوی «تجزیه n به عوامل اول» می‌گوییم. این تجریه یکتا است، یعنی اگر $n = p_1 p_2 \dots . p_s = q_1 q_2 \dots q_r$ داریم $r = s$ و p_i ها همان q_jها هستند که با ترتیب دیگری ظاهر شده‌اند.

مثلاً تجزیه‌ی ۱۲ به عوامل اول عبارت است از

$$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$$

هدف این پروژه مطالعه‌ی نحوه‌ی پراکندگی اعداد اول در بین اعداد طبیعی است.

مسئله‌ی اول

الف) عدد طبیعی r را خالی از مربع می‌نامیم، اگر بر مربع هیچ عدد اولی بخش‌پذیر نباشد. به عبارت دیگر عددی خالی از مربع است که عوامل اول متمایز داشته باشد. مثلا ۶ و ۳۰ خالی از مربع هستند ولی ۱۲ این‌طور نیست. نشان دهید هر عدد طبیعی حاصل‌ضرب یک مربع کامل در یک عدد خالی از مربع است.

ب) ثابت کنید نمایش قسمت قبل یکتا است، به این معنی که اگر $n = r \times s^2 = a \times b^2$ که a و r خالی از مربع‌اند، آن‌گاه $r = a\,,\ \ s = b$.

ج) فرض کنید اعداد اول $p_1, p_2, \dots, p_k$ داده شده‌اند. ثابت کنید تعداد اعداد خالی از مربعی که عامل اولی به جز $p_1, p_2, \dots, p_k$ ندارند، برابر 2^k است.

د) می‌خواهیم ثابت کنیم تعداد اعداد اول بی‌نهایت است. فرض کنید تعداد اعداد اول متناهی باشد. مثلاً $p_1, p_2, \dots, p_k$ همه‌ی اعداد اول باشند. با استفاده‌ی از تجزیه‌ی اعداد طبیعی طبق قسمت الف، نشان دهید برای هر عدد طبیعی N، تعداد اعداد طبیعی کم‌تر از یا مساوی با N حداکثر $2^k\sqrt{N}$ است. در واقع $2^k\sqrt{N} \geq N$ است. با استفاده از این نامساوی، به تناقض برسید!

این تناقض نشان می‌دهد که فرض اولیه نادرست است، یعنی تعداد اعداد اول نامتناهی است.

مسئله‌ی دوم

اگرچه اعداد اول بی‌شمارند، ولی فراوانی آن‌ها در بین اعداد طبیعی هر چه از ۱ به سمت بی‌نهایت حرکت کنیم، کم‌تر می‌شود. در عین حال نوعی بی‌نظمی در دنباله‌ی اعداد اول به چشم می‌خورد که ارائه‌ی یک فرمول ساده برای توصیف آن‌ها را دشوار می‌کند.

نشان دهید صد عدد طبیعی متوالی وجود دارند که هیچ کدام اول نیستند.

مسئله‌ی سوم

یک راه دیگر برای بررسی میزان تنک بودن یک دنباله از اعداد طبیعی نگاه کردن به حاصل جمع معکوس‌های آن‌ها است. احتمالاً هر چه‌قدر این مجموع کوچک‌تر باشد، نشان‌دهنده‌ی تنک‌تر بودن دنباله‌ی مورد نظر است. مثلاً با استفاده از خواص دنباله‌های هندسی، داریم:

$$\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+\cdots=۲$$

اما راجع به مجموع‌های دیگر چه می‌توان گفت؟

حاصل $n+\cdots+۳+۲+۱$ برابر $\frac{n(n+۱)}{۲}$ است، اما عبارت $\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{n}$ فرمول ساده‌ای برحسب n ندارد. سعی می‌کنیم این عبارت را تخمین بزنیم.

الف) نشان دهید:

$$\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۱۶}>۳$$

ب) نشان دهید:

$$\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۱۰۲۴}>۶$$

ج) آیا می‌توانید احکام بالا را تعمیم دهید. مثلاً عدد طبیعی n را به گونه‌ای بیابید که:

$$\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{n}>۱۰۰۰$$

د) نظرتان راجع به مقدار عبارت $\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots$ چیست؟

مسئله‌ی چهارم

مشابه مسئله‌ی قبل می‌توان دید حاصل $۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots n^۲$ برابر $\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$ است، ولی برای $\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\cdots+\frac{۱}{n^۲}$ فرمول ساده‌ای وجود ندارد.

الف) نشان دهید:

$$\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\cdots+\frac{۱}{۱۰^۲}<۲$$

(راهنمایی: $\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\cdots+\frac{۱}{۱۰^۲}<۱+\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\frac{۱}{۳\times۴}+\cdots+\frac{۱}{۹\times۱۰}$)

ب) نشان دهید:

$$\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\cdots+\frac{۱}{۱۰۰^۲}<۲$$

ج) نظرتان در مورد مقدار عبارت $\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\cdots$ چیست؟

مسئله‌ی پنجم

حال می‌خواهیم $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۱۱}+\cdots$ یعنی مجموع معکوس‌های اعداد اول را بررسی‌کنیم. ابتدا به سراغ یک تخمین عددی می‌رویم.

الف) با استفاده از اتحاد نیوتن:

$$(۱+a)^n = ۱+\binom{n}{۱}a+\binom{n}{۲}a^۲+\cdots+\binom{n}{n}a^n$$

که در آن $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$. ثابت کنید:

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n \leq ۱+\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\cdots+\frac{۱}{n!}$$

ب) ثابت کنید اگر $n>۴$، داریم:

$$۱+\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\cdots+\frac{۱}{n!}<۳$$

بنابراین داریم: $\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n<۳$ یا معادلاً

$$۱+\frac{۱}{n}<۳^{\frac{۱}{n}}$$

مسئله‌ی ششم

الف) عبارت زیر را در نظر بگیرید:

$$M=\left(۱+\frac{۱}{۲}\right)\left(۱+\frac{۱}{۳}\right)\left(۱+\frac{۱}{۵}\right)\left(۱+\frac{۱}{۷}\right)\left(۱+\frac{۱}{۱۱}\right)\ldots$$

با در نظر گرفتن این حاصل‌ضرب به شکل مجموع نامتناهی جمله، مشخص کنید در این بسط دقیقاً وارون کدام اعداد طبیعی آمده است. یعنی تمام اعداد طبیعی را بیابید که اگر وارون همه‌ی آن را جمع بزنیم، حاصل برابر این حاصل ضرب باشد. مثلاً ۶ یا ۴۲ این چنین‌اند. چون داریم: $\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۷}=\frac{۱}{۴۲}$ و $\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶}$ و این دو جمله در بسط نامتناهی ظاهر می‌شوند. اما جمله‌ی $\frac{۱}{۴}$ در این بسط ظاهر نمی‌شود، پس ۴ این خاصیت را ندارد.

ب) با توجه به قسمت الف نشان دهید:

$$\left(\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\cdots\right)M = ۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\cdots$$

ج) ثابت کنید: $M=\infty$

حال با استفاده از نتیجه‌ی نهایی مسئله‌ی ۵ ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۱۱}+\cdots=\infty$$

مسئله‌ی هفتم

الف) نشان دهید بی‌نهایت عدد طبیعی مانند n وجود دارد که بین n و $۲n$ حداقل هزار عدد اول وجود دارد.

ب) آیا می‌توان گفت عددی مانند k وجود دارد که بین $k^۲$ و $(k+۱)^۲$ حداقل یک‌میلیون عدد اول وجود دارد؟

مسئله‌ی هشتم

نشان دهید عدد مثبت c وجود دارد به طوری که $\pi(n) > c\frac{n}{\log n}$ به ازای هر n برقرار است. ($\pi(n)$ عبارت است از تعداد اعداد اول کم‌تر از یا مساوی با n)

توجه کنید این حکم نیز نتیجه می‌دهد تعداد اعداد اول بی‌نهایت است (!؟).

موفق باشید