اولین المپیاد هندسهٔ ایران

شهریور ۱۳۹۳

فهرست مطالب

سوال ۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، رأس A قائمه و $\angle C = ۳۰^\circ$ است. دایره‌ای از رأس A می‌گذرانیم تا بر وسط وتر این مثلث مماس شود. این دایره ضلع AC را در N، و دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در M قطع می‌کند. ثابت کنید $MN \perp BC$.

مهدی اعتصامی‌فرد

سوال ۲. دایرهٔ محاطی مثلث ABC بر اضلاع BC، CA و AB در نقاط D، E و F مماس است. پای عمودهای وارد از F و E بر ضلع BC را به ترتیب K و L می‌نامیم. این عمودها دایرهٔ محاطی مثلث را برای بار دوم به ترتیب در M و N قطع می‌کنند. ثابت کنید

$$\frac{\text{مساحت مثلث } BMD}{\text{مساحت مثلث } CND} = \frac{DK}{DL}$$

مهدی اعتصامی‌فرد

سوال ۳. مهدی و مرتضی هر کدام یک ۹۳ ضلعی محاطی رسم کرده‌اند. می‌دانیم اضلاع نظیر آن‌ها دو به دو با یکدیگر موازی است. ثابت کنید نسبت طول اضلاع نظیر این دو ۹۳ ضلعی، مقدار ثابتی است.

مرتضی ثقفیان

سوال ۴. در مثلث ABC داریم $\angle C = ۹۰^\circ + \angle A$. نقطهٔ D روی امتداد ضلع BC است به گونه‌ای که $AC = AD$. نقطهٔ E را در طرف دیگر خط BC (که A در آن قرار ندارد) طوری انتخاب می‌کنیم که $\angle EBC = \angle A$ و $\angle EDC = \frac{\angle A}{۲}$. ثابت کنید $\angle CED = \angle ABC$.

مرتضی ثقفیان

سوال ۵. نقاط X و Y روی کمان BC از دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار دارند (کمانی که شامل رأس A نیست) به طوری که $\angle BAX = \angle CAY$. اگر M وسط وتر AX باشد، ثابت کنید $BM + CM > AY$.

ماهان تجربه‌کار

بارم هر سوال ۸ نمره است.

سوال ۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، رأس A قائمه و $\angle C = ۳۰^\circ$ است. دایره‌ای از رأس A می‌گذرانیم تا بر وسط وتر این مثلث مماس شود. این دایره ضلع AC را در N، و دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در M قطع می‌کند. ثابت کنید $MN \perp BC$.

مهدی اعتصامی‌فرد

سوال ۲. در چهارضلعی $ABCD$ داریم $\angle B = \angle D = ۶۰^\circ$. از نقطهٔ M، وسط ضلع AD، خطی به موازات CD رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطهٔ P قطع کند. نقطهٔ X روی خط CD قرار دارد به گونه‌ای که $BX = MX$. ثابت کنید $AB = BP$ اگر و تنها اگر $\angle MXB = ۶۰^\circ$.

داود وکیلی

سوال ۳. مثلث ABC با زاویه‌های حاده مفروض است. دایرهٔ به قطر BC اضلاع AB و AC را به ترتیب در E و F قطع می‌کند. M وسط ضلع BC و P محل برخورد AM و EF است. X نقطه‌ای دل‌خواه روی کمان EF و Y تقاطع دوم XP با دایرهٔ به قطر BC است. ثابت کنید $\angle XAY = \angle XYM$.

علی ذوعلم

سوال ۴. مماس در A بر دایرهٔ محیطی مثلث حاده‌الزاویه ABC ($AC > AB$) امتداد ضلع BC را در P قطع می‌کند. O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌باشد. X روی OP قرار دارد به طوری که $\angle AXP = ۹۰^\circ$. E و F به ترتیب روی AB و AC و در یک طرف خط OP طوری قرار دارند که $\angle EXP = \angle ACX$ و $\angle FXO = \angle ABX$. اگر K و L محل برخورد EF با دایرهٔ محیطی ABC باشند ثابت کنید OP بر دایرهٔ محیطی مثلث KLX مماس است.

مهدی اعتصامی‌فرد

سوال ۵. دو نقطهٔ P و Q روی ضلع BC از مثلث ABC قرار دارند و از وسط این ضلع به یک فاصله‌اند. عمودهای وارد از P و Q بر BC خطوط AC و AB را به ترتیب در E و F قطع می‌کنند. M محل برخورد PF و EQ می‌باشد. اگر $H_۱$ و $H_۲$ به ترتیب مراکز ارتفاعی مثلث‌های BFP و CEQ باشند ثابت کنید $AM \perp H_۱H_۲$.

مهدی اعتصامی‌فرد

بارم هر سوال ۸ نمره است.

پاسخ‌های سطح مقدماتی

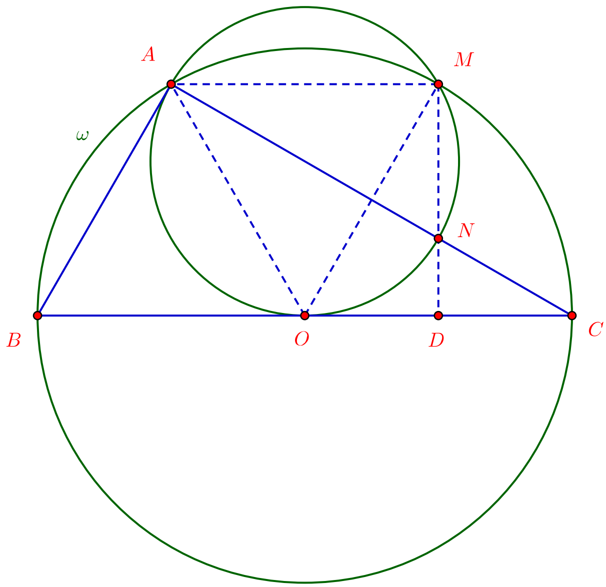
سوال ۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، رأس A قائمه و $\angle C = ۳۰^\circ$ است. دایره‌ای از رأس A می‌گذرانیم تا بر وسط وتر این مثلث مماس شود. این دایره ضلع AC را در N، و دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در M قطع می‌کند. ثابت کنید $MN \perp BC$.

مهدی اعتصامی‌فرد

اثبات. فرض کنید خط MN ضلع BC را در D قطع کند. برای اثبات عمود بودن MN بر BC کافی است ثابت کنیم $\angle CND = ۶۰^\circ$، یا معادلاً $\angle ANM = ۶۰^\circ$. دایرهٔ ω در O بر BC مماس است، پس زاویهٔ ظلی $\angle AOB$ با زاویهٔ محاطی $\angle AMO$ برابر است. از طرفی زاویهٔ $\angle AOB$ زاویهٔ مرکزی و در نتیجه دو برابر زاویهٔ محاطی $\angle ACB$ است. پس

$$\angle AMO = \angle AOB = ۲\angle ACB = ۶۰^\circ$$

OA و OM دو شعاع از دایرهٔ محیطی ABCاند، پس $OA = OM$. بنابر دو نتیجهٔ اخیر در مثلث متساوی‌الساقین AOM زاویهٔ مجاور قاعده ۶۰ درجه است. پس AOM متساوی‌الاضلاع است و $\angle AOM = ۶۰^\circ$. زاویه‌های محاطی $\angle ANM$ و $\angle AOM$ رو به یک کمان از دایرهٔ ω قرار دارند، پس $\angle ANM = \angle AOM = ۶۰^\circ$. $\square$



شکل راه‌حل

سوال ۲. دایرهٔ محاطی مثلث ABC بر اضلاع BC، CA و AB در نقاط D، E و F مماس است. پای عمودهای وارد از F و E بر ضلع BC را به ترتیب K و L می‌نامیم. این عمودها دایرهٔ محاطی مثلث را برای بار دوم به ترتیب در M و N قطع می‌کنند. ثابت کنید

$$\frac{\text{مساحت مثلث } BMD}{\text{مساحت مثلث } CND} = \frac{DK}{DL}$$

مهدی اعتصامی‌فرد

اثبات. می‌دانیم

$$\left.\begin{aligned} \angle BFK &= ۹۰ - \angle B \\ \angle BFD &= ۹۰ - \frac{\angle B}{۲} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle DFM = \frac{\angle B}{۲}$$

اما $\angle MDK = \angle DFM$ بنابراین

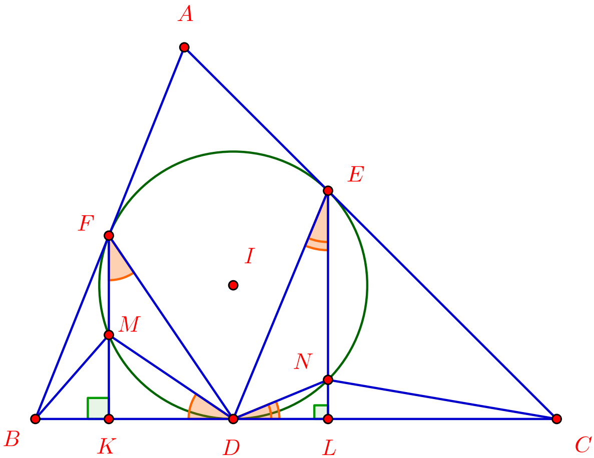
$$\angle MDK = \frac{\angle B}{۲}$$

در نتیجه دو مثلث MDK و BID (با دو زاویهٔ برابر) متشابه‌اند (I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث است) و $\frac{MK}{DK} = \frac{r}{BD}$. به طریق مشابه ثابت می‌شود $\frac{NL}{DL} = \frac{r}{CD}$. پس

$$r = \frac{MK \cdot BD}{DK} = \frac{NL \cdot CD}{DL}$$
$$\Rightarrow \frac{\text{مساحت مثلث } BMD}{\text{مساحت مثلث } CND} = \frac{MK \cdot BD}{NL \cdot CD} = \frac{DK}{DL}$$

□

یادداشت. با فرض‌های مسئله حکم $\frac{AC}{AB} = \frac{\text{مساحت مثلث } BMD}{\text{مساحت مثلث } CND}$ هم درست است.



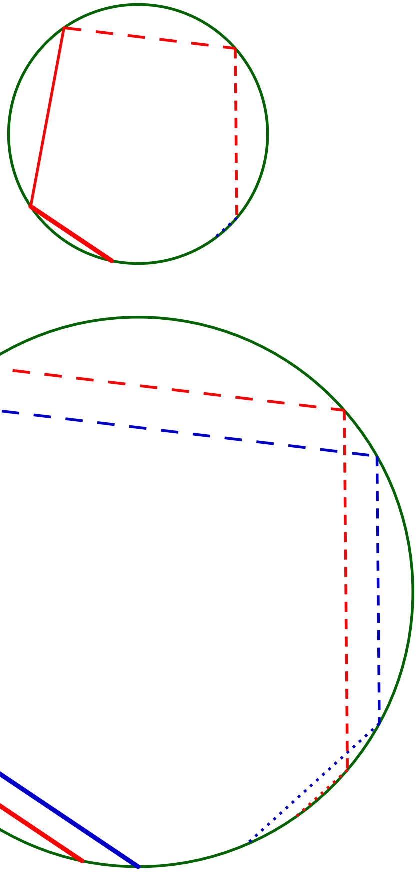
شکل راه‌حل

سوال ۳. مهدی و مرتضی هر کدام یک ۹۳ ضلعی محاطی رسم کرده‌اند. می‌دانیم اضلاع نظیر آن‌ها دو به دو با یکدیگر موازی است. ثابت کنید نسبت طول اضلاع نظیر این دو ۹۳ ضلعی، مقدار ثابتی است.

مرتضی ثقفیان

اثبات. یک ۹۳ ضلعی متشابه با ۹۳ ضلعی دوم در دایرهٔ محیطی ۹۳ ضلعی اول رسم می‌کنیم. (با این کار اضلاع چندضلعی دوم در عدد ثابتی مثل c ضرب می‌شود.) حال دو چندضلعی با شرایط مسئله داریم که در یک دایره محاط شده‌اند. راس‌های چندضلعی اول را با شروع از یک راس دل‌خواه به ترتیب $A_۱, A_۲, \cdots, A_{۹۳}$ و راس‌های متناظر در چندضلعی دوم را $B_۱, B_۲, \cdots, B_{۹۳}$ می‌نامیم.

اضلاع $A_۱A_۲$ و $B_۱B_۲$ موازیند، پس کمان‌های $\widehat{A_۱B_۱}$ و $\widehat{A_۲B_۲}$ برابرند اما در جهت عکس یکدیگر قرار گرفته‌اند. به طور کلی و با استدلالی مشابه، برای هر i (که $۱ \leq i \leq ۹۳$) کمان‌های $\widehat{A_iB_i}$ و $\widehat{A_{i+۱}B_{i+۱}}$ در جهت عکس یکدیگر قرار گرفته‌اند. (منظور از $\widehat{A_{۹۴}B_{۹۴}}$ همان $\widehat{A_۱B_۱}$ است.) از کنار هم قرار دادن تمام این نتایج نتیجه می‌گیریم کمان‌های $\widehat{A_۱B_۱}$ و $\widehat{A_۱B_۱}$ در جهت عکس یکدیگر قرار گرفته‌اند. (به فرد بودن ۹۳ توجه کنید!) پس کمان $\widehat{A_۱B_۱}$ یا ۰° است یا ۱۸۰°. در حالت اول دو چندضلعی بر هم منطبق‌اند، و در حالت دوم نسبت به مرکز دایره قرینه‌اند. بنابراین در هر حالت طول اضلاع متناظر آن‌ها برابر است. در نتیجه نسبت اضلاع متناظر دو چندضلعی اولیه برابر c است. □



شکل راه‌حل

سوال ۴. در مثلث ABC داریم $\angle C = ۹۰^\circ + \angle A$. نقطهٔ D روی امتداد ضلع BC است به گونه‌ای که $AC = AD$. نقطهٔ E را در طرف دیگر خط BC (که A در آن قرار ندارد) طوری انتخاب می‌کنیم که $\angle EBC = \angle A$ و $\angle EDC = \frac{\angle A}{۲}$. ثابت کنید $\angle CED = \angle ABC$.

مرتضی ثقفیان

اثبات. فرض کنید M وسط CD باشد، پس AM عمود منصف CD است. فرض کنید AM خطوط DE و BE را در P و Q قطع کند. در نتیجه $PC = PD$. داریم

$$\angle EBA + \angle CAB = \angle A + \angle B + \angle A = ۱۸۰^\circ - \angle C + \angle A = ۹۰^\circ$$

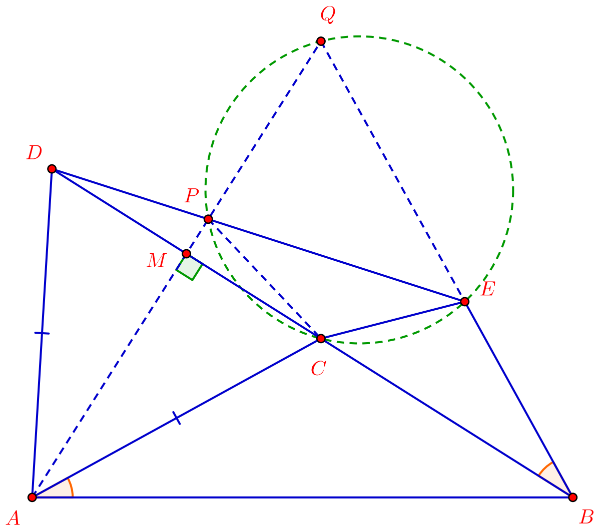
بنابراین خط AC بر BE عمود است. در نتیجه در مثلث ABQ، BC و AC ارتفاع هستند، یعنی C مرکز ارتفاعی این مثلث است و

$$\angle CQE = \angle CQB = \angle A = \frac{\angle A}{۲} + \frac{\angle A}{۲} = \angle PDC + \angle PCD = \angle CPE$$

پس چهارضلعی $CPQE$ محاطی است. بنابراین

$$\angle CED = \angle CEP = \angle CQP = \angle CQA = \angle CBA = \angle B$$

$\square$



شکل راه‌حل

سوال ۵. نقاط X و Y روی کمان BC از دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار دارند (کمانی که شامل رأس A نیست) به طوری که $\angle BAX = \angle CAY$. اگر M وسط وتر AX باشد، ثابت کنید $BM + CM > AY$.

ماهان تجربه‌کار

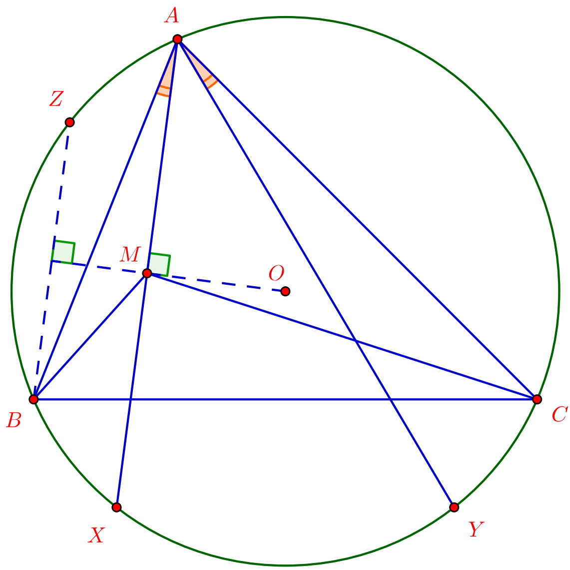
اثبات. M وسط وتر AX و O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است، پس $OM \perp AX$. از B بر OM عمود می‌کنیم تا دایره را در Z قطع کند. چون $OM \perp BZ$ پس OM عمود منصف BZ می‌باشد، یعنی $MZ = MB$. با استفاده از نابرابری مثلث می‌توان گفت

$$BM + MC = ZM + MC > CZ$$

اما $BZ || AX$، پس

$$\widehat{AZ} = \widehat{BX} = \widehat{CY} \Rightarrow \widehat{ZAC} = \widehat{YCA} \Rightarrow CZ = AY$$

در نتیجه $BM + CM > AY$. $\square$



شکل راه‌حل

پاسخ‌های سطح پیشرفته

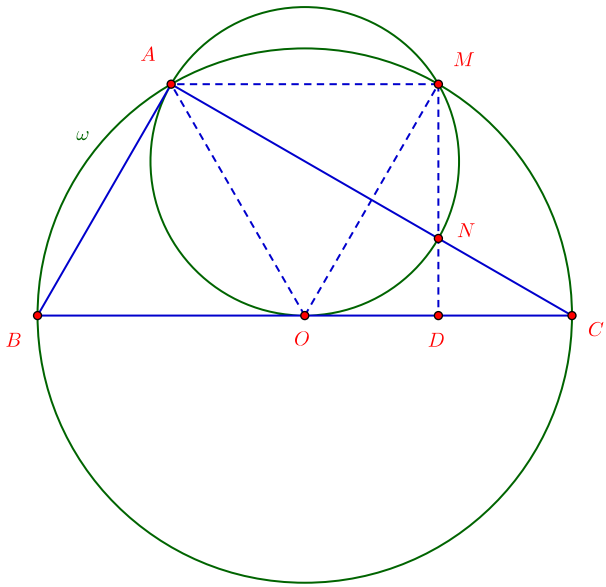
سوال ۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، رأس A قائمه و $\angle C = ۳۰^\circ$ است. دایره‌ای از رأس A می‌گذرانیم تا بر وسط وتر این مثلث مماس شود. این دایره ضلع AC را در N، و دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در M قطع می‌کند. ثابت کنید $MN \perp BC$.

مهدی اعتصامی‌فرد

اثبات. فرض کنید خط MN ضلع BC را در D قطع کند. برای اثبات عمود بودن MN بر BC کافی است ثابت کنیم $\angle CND = ۶۰^\circ$، یا معادلاً $\angle ANM = ۶۰^\circ$. دایرهٔ ω در O بر BC مماس است، پس زاویهٔ ظلی $\angle AOB$ با زاویهٔ محاطی $\angle AMO$ برابر است. از طرفی زاویهٔ $\angle AOB$ زاویهٔ مرکزی و در نتیجه دو برابر زاویهٔ محاطی $\angle ACB$ است. پس

$$\angle AMO = \angle AOB = ۲\angle ACB = ۶۰^\circ$$

OA و OM دو شعاع از دایرهٔ محیطی ABCاند، پس $OA = OM$. بنابر دو نتیجهٔ اخیر در مثلث متساوی‌الساقین AOM زاویهٔ مجاور قاعده ۶۰ درجه است. پس AOM متساوی‌الاضلاع است و $\angle AOM = ۶۰^\circ$. زاویه‌های محاطی $\angle ANM$ و $\angle AOM$ رو به یک کمان از دایرهٔ ω قرار دارند، پس $\angle ANM = \angle AOM = ۶۰^\circ$. $\square$



شکل راه‌حل

سوال ۲. در چهارضلعی $ABCD$ داریم $\angle B = \angle D = ۶۰^\circ$. از نقطهٔ M، وسط ضلع AD، خطی به موازات CD رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطهٔ P قطع کند. نقطهٔ X روی خط CD قرار دارد به گونه‌ای که $BX = MX$. ثابت کنید $AB = BP$ اگر و تنها اگر $\angle MXB = ۶۰^\circ$.

داود وکیلی

اثبات. نقطهٔ X' را در همان سمت MB که X در آن قرار دارد طوری در نظر می‌گیریم که MBX' متساوی‌الاضلاع باشد. کافی است ثابت کنیم

$$AB = BP \Leftrightarrow X' = X$$

می‌خواهیم طرف اول را ثابت کنیم. $AB = BP$، پس مثلث ABP متساوی‌الاضلاع است. با دوران ۶۰ درجه (ساعت‌گرد) حول B نقاط A و M به ترتیب به P و X' تبدیل می‌شوند. یعنی مثلث‌های BAM و BPX' همنهشت‌اند.

$$\angle X'PM = ۳۶۰^\circ - \angle MPB - \angle BPX' = ۳۶۰^\circ - \angle DCB - \angle BAM = ۱۲۰^\circ$$

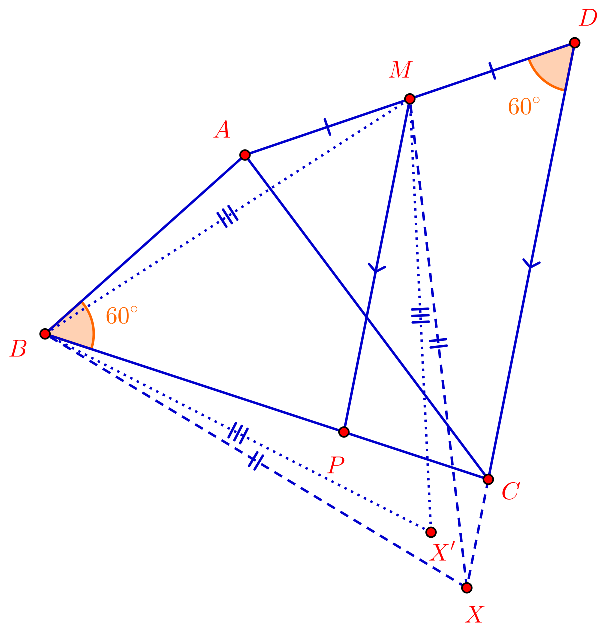
اما از توازی MP و DC به دست می‌آید $\angle PMD = ۱۲۰^\circ$، پس اگر از X' خطی موازی CD رسم کنیم تا AD را در D' قطع کند چهارضلعی $MPX'D'$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین خواهد بود. در نتیجه $PX' = MD'$. اما از همنهشتی $\triangle BAM$ و $\triangle BPX'$ داریم $PX' = AM = MD$. از ترکیب دو تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم $MD' = MD$، یعنی D' بر D منطبق است و X' روی DC قرار دارد. بنابراین X و X' هر دو محل برخورد DC و عمود منصف MBاند، و به وضوح منطبق‌اند.

حال طرف دوم را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم X' بر X منطبق باشد، در این صورت با دوران ۶۰ درجه (ساعت‌گرد) حول B، M به X و A به نقطه‌ای مثل P'

روی BC تبدیل می‌شود. کافی است ثابت کنیم $P' = P$. از P' خطی موازی با CD رسم می‌کنیم تا AD را در M' قطع کند. مشابه حالت قبل داریم

$$\angle XP'M' = ۳۶۰^\circ - \angle MP'B - \angle BP'X = ۳۶۰^\circ - \angle DCA - \angle BAM = ۱۲۰^\circ$$

همچنین $\angle P'M'D = ۱۲۰^\circ$. پس چهارضلعی $XP'M'D$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است و $DM' = P'X = AM = DM$. پس می‌توان گفت $M = M'$، و در نتیجه $P = P'$. $\square$



شکل راه‌حل

سوال ۳. مثلث ABC با زاویه‌های حاده مفروض است. دایرهٔ به قطر BC اضلاع AB و AC را به ترتیب در E و F قطع می‌کند. M وسط ضلع BC و P محل برخورد AM و EF است. X نقطه‌ای دل‌خواه روی کمان EF و Y تقاطع دوم XP با دایرهٔ به قطر BC است. ثابت کنید $\angle XAY = \angle XYM$.

علی ذوعلم

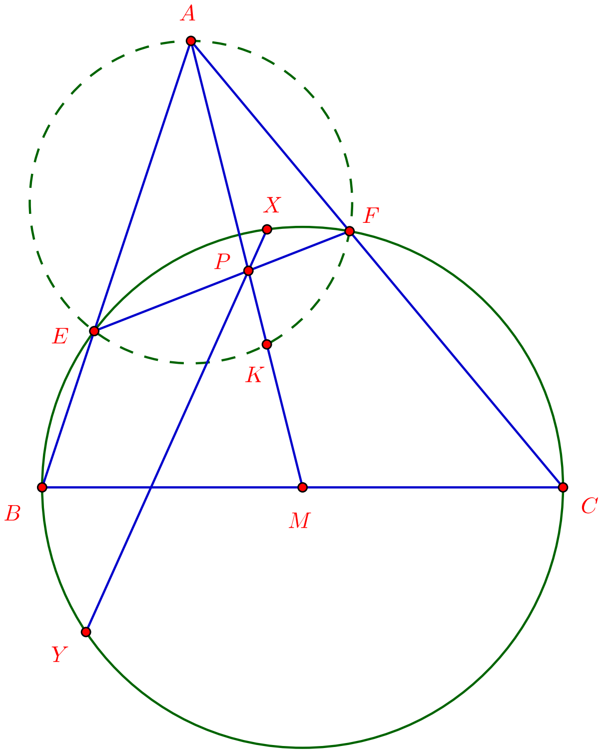
اثبات. محل برخورد دایرهٔ محیطی $\triangle AEF$ با AM را K می‌نامیم. MF بر دایرهٔ محیطی AEF در F مماس است، زیرا $\angle MFC = \angle MCF = \angle AEF$. پس $MF^۲ = MK \cdot MA$. اما $MY = MF$ پس $MY^۲ = MK \cdot MA$. یعنی

$$\angle MYK = \angle YAM \qquad (۱)$$

از طرفی $AP \cdot PK = PE \cdot PF = PX \cdot PY$، پس $AXKY$ محاطی است و در نتیجه

$$\angle XAK = \angle XYK \qquad (۲)$$

از تساوی‌های ۱ و ۲ داریم $\angle XAY = \angle XYM$. □



شکل راه‌حل

سوال ۴. مماس در A بر دایرهٔ محیطی مثلث حاده‌الزاویهٔ ABC ($AC > AB$) امتداد ضلع BC را در P قطع می‌کند. O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌باشد. X روی OP قرار دارد به طوری که $\angle AXP = ۹۰^\circ$. E و F به ترتیب روی AB و AC و در یک طرف خط OP طوری قرار دارند که $\angle EXP = \angle ACX$ و $\angle FXO = \angle ABX$. اگر K و L محل برخورد EF با دایرهٔ محیطی ABC باشند ثابت کنید OP بر دایرهٔ محیطی مثلث KLX مماس است.

مهدی اعتصامی‌فرد

اثبات. نقاط M و N را روی امتداد XF و XE طوری در نظر می‌گیریم که $MLXKN$ محاطی شود. باید ثابت کنیم $\angle NMX = \angle NXP$. از طرفی $\angle ACX = \angle NXP$، پس باید ثابت کنیم $\angle ACX = \angle NMX$. با توجه به قوت دایره‌ها داریم

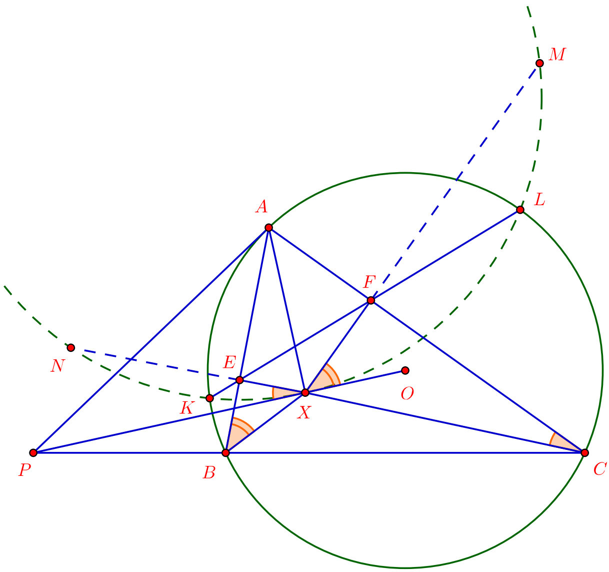
$$XF \cdot FM = FL \cdot FK = AF \cdot FC$$

پس $AMCX$ محاطی است و $\angle AMX = \angle ACX$. به طریق مشابه می‌توان گفت $ANBX$ هم محاطی است. حال کافی است ثابت کنیم $\angle AMX = \angle NMX$، یعنی ثابت کنیم A و N و M روی یک خط قرار دارند. از محاطی بودن $ANBX$ داریم

$$\begin{aligned}\angle NAM &= \angle NAE + \angle A + \angle FAM = \angle EXB + \angle A + \angle CXF \\ &= \angle A + ۱۸۰^\circ - \angle BXC + \angle ABX + \angle ACX \\ &= \angle A + ۱۸۰^\circ - \angle BXC + \angle BXC - \angle A = ۱۸۰^\circ\end{aligned}$$

□

یادداشت. عمود بودن AX بر OP ضرورتی ندارد و حکم مسئله برای هر X روی خط OP برقرار می‌باشد.



شکل راه‌حل

سوال ۵. دو نقطهٔ P و Q روی ضلع BC از مثلث ABC قرار دارند و از وسط این ضلع به یک فاصله‌اند. عمودهای وارد از P و Q بر BC خطوط AC و AB را به ترتیب در E و F قطع می‌کنند. M محل برخورد PF و EQ می‌باشد. اگر $H_۱$ و $H_۲$ به ترتیب مراکز ارتفاعی مثلث‌های BFP و CEQ باشند ثابت کنید $AM \perp H_۱H_۲$.

مهدی اعتصامی‌فرد

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم با حرکت P و Q، خط AM ثابت می‌ماند. برای این کار نسبت $\dfrac{\sin\angle A_۱}{\sin\angle A_۲}$ را حساب می‌کنیم. طبق قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث‌های AFM و AEM داریم

$$\frac{\sin\angle A_۱}{\sin\angle A_۲} = \frac{\sin\angle F_۱}{\sin\angle E_۱}\cdot\frac{FM}{EM} \qquad (۱)$$

همچنین برای مثلث‌های FBP و CEQ داریم

$$\left.\begin{aligned} \sin\angle F_۱ &= \frac{BP}{PF}\cdot\sin\angle B \\ \sin\angle E_۱ &= \frac{CQ}{EQ}\cdot\sin\angle C \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\sin\angle F_۱}{\sin\angle E_۱} = \frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}\cdot\frac{EQ}{FP} \qquad (۲)$$

بنابر تساوی‌های ۱ و ۲

$$\frac{\sin\angle A_۱}{\sin\angle A_۲} = \frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}\cdot\frac{EQ}{FP}\cdot\frac{FM}{EM} \qquad (۳)$$

مثلث‌های FMQ و EMP متشابه‌اند، پس

$$\frac{FM}{FP} = \frac{FQ}{FQ+EP},\quad \frac{EQ}{EM} = \frac{FQ+EP}{EP}$$

با جای‌گذاری در تساوی ۳ به دست می‌آید

$$\frac{\sin\angle A_۱}{\sin\angle A_۲} = \frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}\cdot\frac{FQ}{EP} \qquad (۴)$$

از طرفی

$$\left.\begin{array}{l}\tan\angle B = \dfrac{FQ}{BQ}\\ \tan\angle C = \dfrac{EP}{CP}\\ BQ = CP\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{FQ}{EP} = \frac{\tan\angle B}{\tan\angle C}$$

اگر نتیجه را در تساوی ۴ جای‌گذاری کنیم خواهیم داشت

$$\frac{\sin\angle A_1}{\sin\angle A_2} = \frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}\cdot\frac{\tan\angle B}{\tan\angle C}$$

که مقدار ثابتی است.

حال نشان می‌دهیم H_1H_2ها موازی‌اند. اگر α زاویهٔ H_1H_2 با BC باشد آن‌گاه می‌توان گفت

$$\tan\alpha = \frac{H_2P - H_1Q}{QP} \tag{۵}$$

چون H_1 و H_2 مراکز ارتفاعی مثلث‌های BFP و CQE هستند داریم

$$QF\cdot H_1Q = BQ\cdot QP \Rightarrow H_1Q = \frac{BQ\cdot QP}{FQ}$$

$$EP\cdot H_2P = CP\cdot PQ \Rightarrow H_2P = \frac{CP\cdot PQ}{EP}$$

اما $BQ = CP$، پس

$$\Rightarrow H_2P - H_1Q = \frac{PQ\cdot BQ\cdot(FQ-EP)}{EP\cdot FQ}$$

با جای‌گذاری در تساوی ۵

$$\tan\alpha = \frac{BQ\cdot(FQ-EP)}{EP\cdot FQ} = \frac{BQ}{EP} - \frac{BQ}{FQ} = \frac{CP}{EP} - \frac{BQ}{FQ}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \cot\angle C - \cot\angle B \tag{۶}$$

در نتیجه مقدار $\tan\alpha$ ثابت است، پس $H_۱H_۲$ها با هم موازیند.

اگر زاویهٔ AM با BC را θ بنامیم باید ثابت کنیم

$$\tan\alpha \cdot \tan\theta = ۱$$

محل برخورد AM با BC را X می‌نامیم.

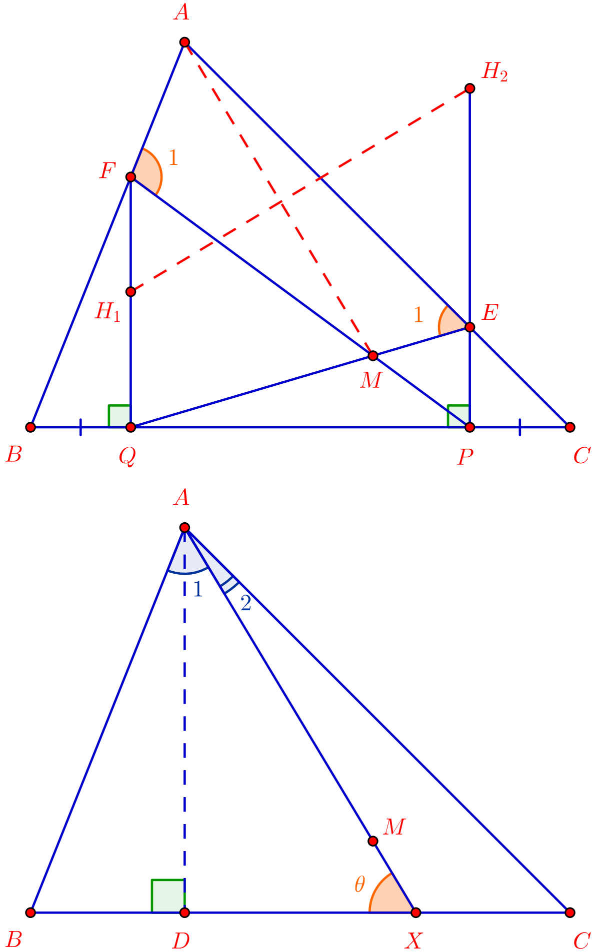
$$\frac{BX}{CX} = \frac{\sin\angle A_۱}{\sin\angle A_۲} \cdot \frac{\sin\angle C}{\sin\angle B} \Rightarrow \frac{BX}{CX} = \frac{\tan\angle B}{\tan\angle C}$$

اگر D پای ارتفاع A باشد آن‌گاه می‌توان گفت

$$\frac{BX}{CX} = \frac{\tan\angle B}{\tan\angle C} = \frac{AD/BD}{AD/CD} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow BD = CX$$

$$\begin{aligned}\tan\theta = \frac{AD}{DX} &= \frac{AD}{CD - CX} = \frac{AD}{CD - BD} \\ &= \frac{۱}{CD/AD - BD/AD} = \frac{۱}{\cot\angle C - \cot\angle B}\end{aligned}$$

بنابر تساوی ۶ و تساوی اخیر حکم مورد نظر اثبات می‌شود. $\square$



شکل راه‌حل